CHUYÊN ĐỀ 3: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp chứng minh đường thẳng a và đường thẳng b vuông góc với nhau:

Phương pháp 1: Chứng minh chúng song song với hai đường vuông góc khác.

Phương pháp 2: Đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

Phương pháp 3: Dựng tính chất của ba đường cao và cạnh đối diện trong một tam giác.

Phương pháp 4: Đường kính đi qua trung điểm của một dây.

Phương pháp 5: Phân giác của hai góc kề bù nhau.

Phương pháp 6: Sử dụng góc nối tiếp nửa đường tròn.

Phương pháp 7: Sử dụng tính chất đường trung trực.

Phương pháp 8: Tính chất tiếp tuyến và đường kính của đường tròn.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho tam giác ABC, các đường cao BD và CE. Gọi M, N là chân các đường vuông góc kẻ từ B, C đến DE. Gọi I là trung điểm của DE, K là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: KI $\perp$ ED?

Chứng minh

Xét tam giác BDC có: DK là đường trung tuyến $DK = \frac{1}{2}BC$ (1)

Xét tam giác BEC có: EK là đường trung tuyến $EK = \frac{1}{2}BC$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: DK = EK.

Suy ra: tam giác EKD cân tại K.

Mà I là trung điểm của DE.

Do đó: KI là đường cao của tam giác EKD suy ra KI $\perp$ ED.

Bài tập 2: Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N. Gọi H giao điểm của BM và AN. Chứng minh rằng SH $\perp$ AB.

Chứng minh

Ta có: $AMB = 90^0$ (t/c góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$ANB = 90^0$ (t/c góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tam giác SAB có AN, BM là hai đường cao.

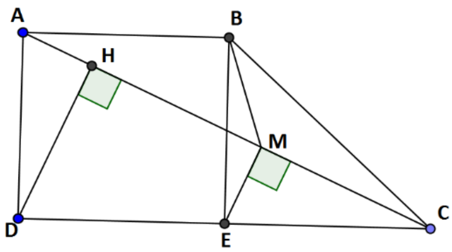
Mà H là giao điểm của AN và BM suy ra H là trực tâm của tam giác SAB.

Suy ra: SH thuộc đường cao thứ ba của tam giác SAB.

Vậy SH $\perp$ AB.

Bài tập 3: Cho hình thang vuông ABCD, $A = D = 90^0$, có CD = 2AB. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AC và M là trung điểm của HC. Chứng minh rằng đường thẳng qua DM vuông góc với đường thẳng qua BM.

Giải



Kẻ BE $\perp$ CD ($E \in CD$).

Vì CD = 2AB nên AB = DE = EC.

Hay E là trung điểm của CD.

Xét tam giác DHC có EM là đường trung bình.

Suy ra EM // DH suy ra EM $\perp$ AC (Vì DH $\perp$ AC).

Xét tứ giác MADE có $ADC = 90^0$ và $AME = 90^0$

Suy ra: Tứ giác MADE nội tiếp đường trong đường kính AE. Tức là bốn điểm M, A, D, E nằm trên một đường tròn. (1)

Xét tứ giác ABED có: $ADE = 90^0$ và AB = DE.

Suy ra tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

Suy ra Bốn điểm A, B, E, D nằm trên một đường trong đường kính AE. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: M thuộc đường tròn đường kính AE.

Ta có: Tứ giác ABMD nội tiếp.

Mà $BAD = 90^0 \Rightarrow BMD = 90^0$ suy ra BM $\perp$ DM.

Bài tập 4: Cho tam giác cân ABC, gọi H là trung điểm của BC và E là hình chiếu của H trên AC. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng HE. Chứng minh AO vuông góc với BE.

Chứng minh

Gọi K là trung điểm của EC.

Ta có: HK là đường trung bình của tam giác BEC nên HK // EB (1)

Trong tam giác EHC, ta có: OK là đường trung bình nên OK // HC. (2)

Mà AH $\perp$ HC (giả thiết) (3)

Từ (2) và (3), suy ra: OK $\perp$ AH (*)

Ta lại có: HE $\perp$ AC (vì E là hình chiếu của H trên AC) (**)

Từ (*) và (**), suy ra: O là trực tâm của tam giác AHK

Suy ra AO $\perp$ HK (4)

Từ (1) và (4), suy ra: AO $\perp$ BE (điều phải chứng minh).

Bài tập 5: Cho tam giác AHC, có ($H = 90^0$). Đường cao HE. Gọi O, K lần lượt là trung điểm của EH và EC. Chứng minh AO vuông góc với HK.

Chứng minh

Từ giả thiết có OK là đường trung bình của tam giác EHC

Suy ra OK // HC.

Mặt khác: HC $\perp$ AH

Suy ra OK $\perp$ AH

Xét tam giác AHK có: HE $\perp$ AC, OK $\perp$ AH

Suy ra O là trực tâm của tam giác AHK

Suy ra AO $\perp$ HK.

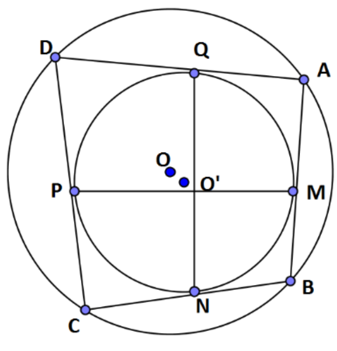
Bài tập 6: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đồng thời ngoại tiếp đường tròn khác có các tiếp điểm M, N, P, Q lần lượt với các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác đã cho. Chứng minh rằng MP vuông góc với NQ.

Chứng minh

Gọi (O) là đường tròn nội tiếp tứ giác và (O') là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

Ta có:

$B = \frac{\text{s®}MQPN - \text{s®}MnN}{2}$ (góc có đỉnh bên trong đường tròn)



$B = \frac{\text{s®}PNMQ - \text{s®}PkQ}{2}$ (góc có đỉnh bên ngoài đường tròn)

$D + B = 90^0$ (vì tứ giác ABCD nội tiếp (O'))

Suy ra $\frac{\text{s®}MQPN - \text{s®}MnN + \text{s®}PNMQ - \text{s®}PkQ}{2} = 180^0$

Suy ra $\frac{\text{s®}PIN + \text{s®}MmQ}{2} = 180^0$

Mà $MIQ + PIN = \frac{\text{s®}PIN + \text{s®}MmQ}{2} = \frac{180^0}{2} = 90^0$

Suy ra MP $\perp$ QN. (điều phải chứng minh)

Bài tập 1: Cho tam giác ABC đều. Gọi H là trung điểm của BC và E là hình chiếu của H trên AC. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng HE. Chứng minh: AO $\perp$ BE.

Bài tập 2: Cho tam giác vuông cân ABC ($A = 90^0$). Gọi H là trung điểm của BC và E là hình chiếu của H trên AC. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng HE.

Chứng minh: AO $\perp$ BE.

Bài tập 3: Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Hạ HI $\perp$ AC, M là trung điểm của HI. Chứng minh BI $\perp$ AM.

Bài tập 4: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu của B trên AC. I và N lần lượt là trung điểm của AD và HC. Chứng minh: BN $\perp$ IN.

Bài tập 5: Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Dựng hình chữ nhật AHCK, HI $\perp$ AC. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của IC và AK . Chứng minh: MN $\perp$ BI.

Bài tập 6: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu của B trên AC. Gọi E, F, M lần lượt là trung điểm của AB, DH, BH. Chứng minh: AM $\perp$ EF.

Bài tập 7: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu của B lên AC. E, F, M, N lần lượt là trung điểm của AB, DH, HC, AD.

Chứng minh: EF $\perp$ MN.

Bài tập 8: Cho tam giác ABC ($A = 90^0$). H là hình chiếu của A trên BC. I, K là thứ tự hai điểm thuộc AH và CK sao cho HK

$$\frac{HK}{KC} = \frac{HI}{IA}$$

Chứng minh: BI $\perp$ AK.

Bài tập 9: Cho hình thang vuông ABCD ($A = B = 90^0$) và AC = m, BD = n. Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Lấy điểm $K \in HC$, sao cho

$$\frac{KH}{KC} = \frac{HI}{IA}$$

Chứng minh: DK $\perp$ AK.

Bài tập 10: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi E là giao điểm của hai cạnh đối AD và BC. Gọi F là giao điểm của hai cạnh đối DC và AB. Chứng minh rằng các tia phân giác trong của hai góc E và F vuông góc với nhau.

Bài tập 11: Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia AD và BC lần lượt lấy hai điểm E và F sao cho DF=CE=DC. Trên tia DC lấy điểm H sao cho CH = CB. Chứng minh: AE $\perp$ FH.

Bài tập 12: Cho hình vuông ABCD. T là một điểm bất kì ở trên cạnh AB (T khác A và B). Tia DT cắt tia CB tại E. Đường thẳng CT cắt AE tại M. Chứng minh rằng đường thẳng DE vuông góc với đường thẳng DM.

Bài tập 13: Cho hình vuông ABCD cố định. Lấy Điểm T trên cạnh AB (T khác A và B). Tia DT cắt tia CB tại E. Đường thẳng CT cắt đường thẳng AE tại M .Đường thẳng BM cắt đường thẳng DE tại F. Tìm quỹ tích điểm F khi T chạy trên cạnh AB.

Bài tập 14: Cho tam giác TBE ($B = 90^0$). Vẽ đường phân giác BD và đường cao BF. Từ D dựng DA và DC theo thứ tự vuông góc với cạnh TB và cạnh BE (A trên cạnh TB, C trên BE). Chứng minh rằng các đường thẳng TC, AE, BF cắt nhau tại một điểm.

Bài tập 15: Đường tròn tâm O nội tiếp trong tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là hai tiếp điểm của đường tròn đó với hai cạnh AB và AC. Tia MN cắt tia phân giác của góc B tại P. Chứng minh BP vuông góc với CP.